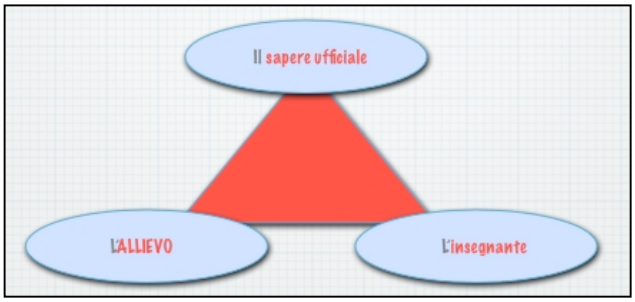
Seconda parte
MODELLI TEORICI E METODOLOGICO-DIDATTICI

Perchè il laboratorio di matematica?
Modelli, riflessioni, idee da condividere



L'insegnamento è un sistema complesso in cui interagiscono il sapere ufficiale, l'allievo, con le sue conoscenze, i suoi misconcetti, i suoi errori, e l'insegnante, con le opinioni che ha degli allievi e del sapere ufficiale.[17]

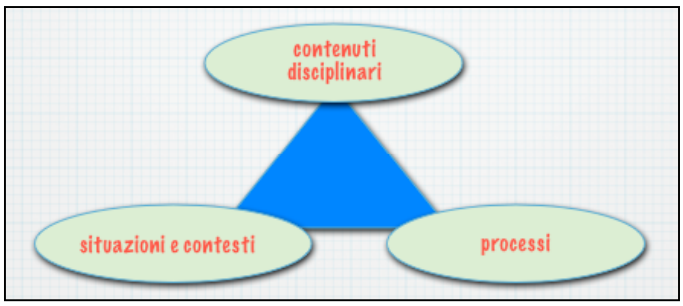
Vari autori hanno elencato le convinzioni degli studenti rispetto alla matematica: per esempio Schoenfeld[18] cita le seguenti:

- i problemi matematici hanno una sola risposta
- c'è un solo modo corretto di risolvere i problemi (di solito la regola giusta è l'ultima spiegata dall'insegnante)
- gli studenti normali non possono aspettarsi di capire la matematica ma solo di memorizzarla e applicare meccanicamente ciò che hanno imparato..senza capire
- la matematica è un'attività solitaria
- gli studenti che hanno capito la matematica studiata sono in grado di risolvere un problema in 5 minuti o meno
- la matematica imparata a scuola non ha nulla a che vedere con il mondo reale

oppure Dematté[19]

- la matematica non è un processo sociale
- la matematica è immutabile nel tempo
- non c'è gente che si diverte a fare matematica

e così via…
Le attività che abbiamo presentato contraddicono queste credenze degli alunni perché rompono rispetto a molti schemi precostituiti. Ad esempio dimostrano come le soluzioni ai problemi possano (anzi debbano) essere molteplici, come costruire sapere matematico sia tipicamente un processo sociale e come ci si possa anche divertire facendo matematica.



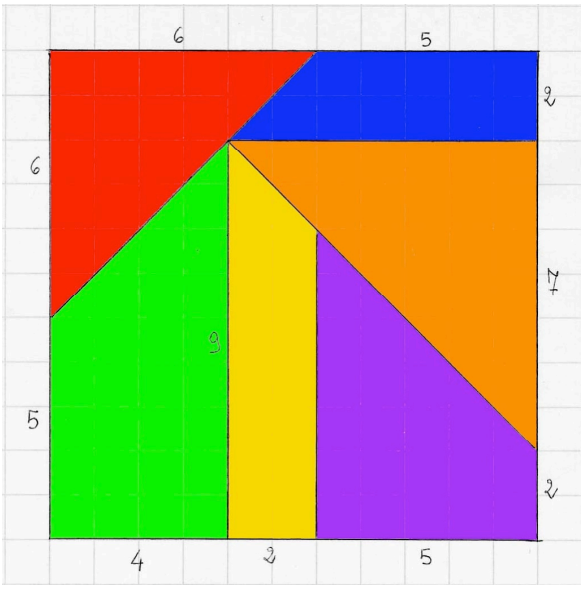
La nostra proposta fa riferimento a un'idea di insegnamento-apprendimento della matematica in cui si intrecciano i contenuti disciplinari, le situazioni e i contesti in cui i problemi sono posti, che forniscono un senso agli allievi, e i processi che l'allievo deve attivare per risolvere i problemi.
Una situazione, un contesto ha senso per gli allievi quando fa parte della loro esperienza, sia scolastica che extrascolastica, quindi porta con sé un linguaggio, non ancora specifico, forse

[17] Ogden, C.K., Richards, I.A., (1923) introducono il *triangolo semiotico* costituito da 'thought or reference, referent and symbol', Chevallard, Y. (1985) propone il *triangolo della didattica* ai cui vertici si collocano 'le savoir, le maître, l'élève', Steinbring, H. (2005) introduce il *triangolo epistemologico* ai cui vertici si collocano 'object/reference context, sign/symbol, concept'.
[18] Schoenfeld, A. (1992). "Learning to think matematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics" in A.D. Grows(ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching, 334-370
[19] Dematté A. e Furinghetti F., (2003) Risposte affettive e cognitive al compito "dipingo la matematica" , La Matematica e la sua Didattica , n. 3, 305-326.

molto "sporco" perchè mescolato con fatti di esperienza, ma che consente comunque di comunicare le proprie idee, di argomentare, di utilizzare metafore per parlare di ciò che non sa usando le parole che sa, di trovare analogie con fatti sperimentati. Tutto ciò fa sì che possa partire il processo che porterà alla costruzione di nuove conoscenze.
Quindi da un lato l'insegnante deve fare attenzione ai contenuti matematici da far apprendere e dall'altra alle situazioni in cui li contestualizza per i suoi allievi.
Ma nella scuola dell'obbligo... che cosa è importante trasmettere agli allievi? La prima cosa è sicuramente il piacere di fare matematica e questo dipende sia dalle proposte didattiche sia dal clima che viene instaurato nella classe. Solo se il clima è adatto gli alunni possono capire che in matematica è importante imparare dai propri errori, ragionare in modo autonomo, argomentare…[20]
Questi aspetti sono fondamentali, ma è anche necessario che gli sforzi dell'insegnante siano diretti verso la costruzione di idee matematiche forti, che abbiano un futuro perché si evolveranno negli ordini scolastici successivi. Deve quindi operare delle scelte nei contenuti per ottimizzare i tempi.
Quale didattica può rispondere a queste esigenze? Innanzitutto una didattica di tipo elicoidale per cui si riprendono più volte gli argomenti approfondendoli e ampliandoli. Occorre porsi obiettivi a lungo termine, ragionare su tempi lunghi. Infine è importante che si adotti una metodologia che ponga al centro dell'azione didattica il laboratorio e l'uso della discussione "matematica" come strumento per costruire conoscenze condivise.
Come viene evidenziato nel testo Matematica 2001[21] 'l'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica.' Quindi l'attenzione è rivolta non solo alla funzione strumentale della matematica ma anche a quella culturale e, di conseguenza, le competenze matematiche che devono raggiungere gli alunni per acquisire questa nuova cittadinanza sono: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni di incertezza.
L'indagine OCSE–PISA dà un nome alla competenza in matematica, 'Mathematical literacy' e la definisce in questo modo: 'è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze delle vita dell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.'
Questo è in perfetta sintonia con le idee di fondo che hanno guidato la stesura degli esempi di attività di Matematica 2001 perché non bastano più le sole abilità strumentali, occorrono abilità che consentano un adattamento veloce al sapere che nella nostra società è in continua evoluzione.
Abbiamo detto prima che il luogo più adatto per costruire questa nuove competenze è il laboratorio di matematica. Ma cosa intendiamo per laboratorio di matematica?
Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, ma piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici.
L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. Vi si attua quindi, come abbiamo già evidenziato, una sorta di "apprendistato cognitivo" mediante il quale gli allievi agiscono come se fossero dei matematici, reinventando i significati degli oggetti matematici incorporati nelle situazioni problematiche predisposte dagli insegnanti.
Anche le Nuove Indicazioni per il curriculum sottolineano l'importanza del laboratorio.

[20] sulle difficoltà in matematica, sul ruolo dell'errore e sull'uso del problem solving consultare Zan, R. (2007), Difficoltà in matematica, Osservare, interpretare, intervenire, Springer Verlag Italia
[21] il volume Matematica 2001 è interamente scaricabile da internet alla pagina http://www.umi.dm.unibo.it/ e contiene esempi di attività per la scuola primaria e secondaria di I grado suddivisi in 7 nuclei, 4 di contenuto (il numero, lo spazio e le figure, le relazioni, i dati e le previsioni) e 3 di processo (argomentare e congetturare, misurare, risolvere e porsi problemi)

Nella scuola dell'infanzia, anche se non è esplicitamente menzionato, si fa sempre riferimento ad una didattica che parta dall'esperienza diretta, dal gioco, dal procedere per tentativi ed errori, dal creare occasioni e possibilità di fare esperienze.
Nella scuola primaria e secondaria di I grado si parla invece in modo esplicito di 'realizzare percorsi in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa.' Questa è un'idea di laboratorio in cui le attività non sono episodiche ma fanno parte di un percorso strutturato e in cui è importante instaurare un dialogo tra insegnante e alunni e tra gli alunni stessi, un laboratorio non solo come luogo del fare ma soprattutto come luogo del pensare. Come sottolineano Anzellotti e Cotoneschi 'il laboratorio non è solamente specifico delle scienze sperimentali, ma è modalità fondamentale dell'apprendimento della Matematica.'[22]
Ma quale metodo si può utilizzare per attuare una didattica laboratoriale?
Le nostre proposte didattiche si rifanno sia a presupposti costruttivisti, con particolare riferimento all'ambiente delle situazioni problema di scuola francese (Brousseau, Arsac…)[23], sia a presupposti di matrice vygotskiana[24] e quindi all'ambiente dell'apprendistato cognitivo. Questi due modi di lavorare non sono uguali, ma possono diventare complementari.
Nell'ambiente delle situazioni problema, il maestro progetta una situazione a-didattica in cui il sapere viene ri-contestualizzato, la devolve agli allievi, gli allievi se ne impadroniscono e producono soluzioni da loro stessi validate, riequilibrano le loro conoscenze inserendo il nuovo sapere che è necessariamente entrato in gioco risolvendo la situazione problema.
Il maestro è depositario del sapere che verrà istituzionalizzato.
Per spiegare meglio in che cosa consiste una situazione-problema vi illustriamo brevemente il problema del puzzle proposto da Brousseau.



Gli alunni devono ingrandire il puzzle che si vede in figura con questa regola: il lato che nella figura misura 4 cm nel puzzle ingrandito dovrà misurare 7 cm. Gli alunni lavorano a gruppi di 6 e ogni alunno costruisce un solo pezzo del puzzle. Al termine i 6 pezzi devono combaciare per formare nuovamente il quadrato. Di solito la prima ipotesi su cui gli alunni lavorano è quella di aggiungere 3 cm a tutti i lati dei loro pezzi: ma subito si accorgono che i lati non combaciano. Discutendo tra loro è probabile che trovino altre strade che li obbligano a passare da un ragionamento di tipo additivo ad uno, più consono, di tipo moltiplicativo che li conduce gradualmente, con la mediazione dell'insegnante, all'idea di proporzionalità. "*Se 4 diventa 7, allora 2 diventa 3,5 e 1 diventa 1,75*": questo è uno dei possibili modi di ragionare degli alunni di una classe quinta, la strada che seguono dipende molto dal tipo di competenze che hanno raggiunto nell'ambito dei numeri razionali.
Nell'ambiente dell'apprendistato cognitivo, il sapere è incorporato in un mediatore culturalmente significativo per l'allievo, il maestro è depositario del sapere, esplicita e forza (eventualmente) la situazione, non è necessariamente l'esperto, si mette in gioco, l'apprendimento può conseguire

[22] Anzellotti, G., Cotoneschi, S., (2007). La Matematica nelle indicazioni nazionali per la scuola dell'infanzia, la scuola primaria e la secondaria di primo grado, Notizie della scuola, n. 2, pag. 195-201
[23] Brousseau, G. (2000). L'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo: micro e macro-didattica, in Didattica della Matematica nel III millennio a cura di D'Amore B., Atti del 14° Convegno di Didattica della matematica di Castel San Pietro Terme, Bologna, Pitagora Editrice
Brousseau, G., (2000). Elementi per una ingegneria didattica, Bologna, Pitagora Editrice
Arsac, G., Germain, G., Mante, M., (1988) Problème ouvert e situation-problème, Institut de Rechèrche pour l'einsegnement des mathématiques Academie de Lyon, Université Claude Bernard, Lyon 1
[24] Vygotskij, L. S. (1980). Il processo cognitivo, Torino, Boringhieri

anche da riproduzione e imitazione (in un primo momento), è necessaria l'interazione sociale (discussione in classe orchestrata dall'insegnante). Le attività che abbiamo presentato prima si rifanno maggiormente a questa modalità perché è difficile prevedere esattamente a quali strategie e/o modelli concettuali faranno riferimento gli alunni nella risoluzione di una situazione problematica e quindi la mediazione dell'insegnante e il suo ruolo di "prestamano" è sempre indispensabile.
In una didattica che fa riferimento a questo tipo di ambiente di apprendimento il compito dell'insegnante diventa più complesso ma anche molto più gratificante dal punto di vista professionale perché non si limita più a riproporre sempre gli stessi contenuti e gli stessi esercizi ma diventa veramente un po' artista e un po' attore. Artista nell'inventare sempre nuove attività e attore nel gestire le complesse interazioni di classe che conducono gli alunni a costruire e consolidare le proprie conoscenze matematiche.
Per svolgere bene il suo compito deve partire da una griglia a maglie larghe che contenga alcune tappe fondamentali del sapere matematico da costruire nella scuola dell'obbligo e cercare alcune situazioni prototipo forti che incorporino i pezzi di sapere matematico da far costruire agli allievi. Prima di proporre un problema deve verificare che il sapere in gioco sia in zona di sviluppo prossimale[25] cioè che per risolverlo gli allievi possiedano alcuni strumenti a cui fare riferimento per poter avviare un processo risolutivo, ma che per arrivare alla soluzione serva un po' di aiuto dall'insegnante o dai compagni. Deve accettare con piena consapevolezza che l'errore faccia parte del processo risolutivo, anzi che in alcuni casi sia addirittura necessario per far progredire gli allievi verso nuove conoscenze.
Nel percorso che conduce alla "costruzione sociale del sapere" il punto di partenza è costituito dalla risoluzione di una situazione problematica, il punto di arrivo è l'istituzionalizzazione del sapere. Il processo si attua ciclicamente in un intreccio di attività di classe e di laboratorio ciascuna con caratteristiche ben definite.

[25] Vygotskij. L.S. (1992). Pensiero e linguaggio (a cura di L. Mecacci), Bari, Laterza,

Un protocollo per la gestione delle situazioni problematiche in classe

Che cos'è una situazione problematica?
La situazione problematica (SiPro) è un "problema" aperto, contestualizzato. Deve fare riferimento a un campo d'esperienza significativo per l'allievo, deve appoggiarsi su saperi e saper fare relativi alla sua età e alle sue conoscenze, deve coinvolgere la sua affettività ed emotività.
La risoluzione della SiPro deve inoltre essere percepita come una sfida da parte dell'allievo, deve stimolarlo senza generare però frustrazione.
La SiPro deve essere consegnata come tale agli allievi senza ulteriori mediazioni da parte dell'insegnante che si limita a leggere il testo all'intera classe e a rispondere alle richieste mirate alla pura comprensione linguistica del testo.
La metodologia di lavoro in classe è quella del lavoro in gruppi. Ogni gruppo affronta la SiPro con gli strumenti che ritiene necessari. Ogni gruppo al termine del lavoro elabora una breve relazione scritta.
Qual è il ruolo dell'insegnante?
L'insegnante si limita ad osservare il lavoro dei gruppi facendo eventualmente uso di griglie di osservazione[26], di una videoregistrazione, senza interferire con il lavoro. Raccoglie relazioni e materiali prodotti dai gruppi e analizza le strategie risolutive utilizzate. Individua errori e misconcetti, prepara il canovaccio della discussione plenaria e realizza uno schema (cartellone) dove presenta le diverse strategie utilizzate.
Sulla base del canovaccio l'insegnante orchestra la discussione in classe favorendo il confronto e guidando verso la condivisione delle strategie corrette.
A conclusione della discussione, decontestualizza le nuove conoscenze per farle diventare sapere formalizzato.
Quali sono i punti di forza di una didattica per situazioni problematiche?
L'attività didattica fondata sulle SiPro permette di osservare gli allievi mentre lavorano in gruppo, analizzare i processi di soluzione messi in atto e comprendere la natura dei loro modelli mentali. Permette inoltre di analizzare le modalità utilizzate per affrontare i nodi cognitivi ed osservare le loro competenze in azione (sapere, saper fare, saper essere, saper costruire nuova conoscenza). L'attività in ultimo permette di elaborare gli elementi per una valutazione formativa e orientativa che affianchi la tradizionale valutazione accertativa.

[26] vedi esempio di griglia di osservazione a pag. 13

La discussione matematica: come e perchè

La comunicazione come elemento che interviene nella vita della classe, è menzionata nei curricola di molti paesi. Per esempio negli USA, il Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics curata dal NCTM nel 1989 include tra gli obiettivi 'Imparare a comunicare matematicamente'. In particolare si dice che: 'Lo sviluppo di una capacità dello studente di usare la matematica comprende imparare i segni, i simboli, e termini della matematica. Ciò avviene al meglio nelle situazioni problematiche in cui gli studenti hanno l'opportunità di leggere, scrivere e discutere idee, in cui l'uso del linguaggio matematico diventa linguaggio naturale'.
Ci sono alcuni punti cruciali della discussione matematica, non si tratta solamente di trovare delle strategie per far parlare gli alunni.
Innanzitutto il compito assegnato deve essere tale per cui non possa essere evitata la discussione.[27]
La pratica della discussione educa la capacità di esprimersi con chiarezza che non vuol dire chiaro solo per il compagno, ma anche e soprattutto per se stessi: diventa un modo per imparare ad imparare perché solo quando l'alunno sa raccontare a se stesso il suo pensiero può dire di aver capito. Esiste una stretta relazione tra il processo risolutivo e la capacità di spiegare: più un alunno è stato partecipe delle varie fasi che hanno condotto alla risoluzione di un problema più sarà in grado di spiegarle anche ripercorrendo i propri errori. Infine non va sottovalutata l'importanza dell'imparare ad ascoltare, perché l'ascolto nella discussione ha un ruolo importante, sia l'ascolto dell'insegnante che cerca di interpretare il pensiero degli alunni per guidarli verso la meta, sia l'ascolto degli alunni tra di loro perché un compagno potrebbe avere parole più adatte dell'insegnante per farsi capire.
Come si può intuire, nella discussione matematica, il ruolo dell'insegnante è sempre centrale. Ogni gesto, ogni parola che dice ha una conseguenza, non è mai neutro, i suoi atti sono intenzionali, non casuali. Ma quali competenze servono per gestire "bene" una discussione matematica?
Tralasciando per il momento le competenze di tipo disciplinare che sono comunque fondamentali, per condurre la discussione bisogna, prima di avviarla, preparare un canovaccio, una traccia da seguire che tenga conto delle fasi precedenti del lavoro e del sapere che c'è in gioco, e poi "imparare" alcune tecniche di conduzione tra cui, fondamentale, quella del rispecchiamento.[28]
Quali sono le buone domande che contestualizzate nel problema da risolvere, possono guidare gli alunni nell'apprendimento di nuove conoscenze.
Dopo aver raccolto su un cartellone o scritto alla lavagna le tipologie di soluzione degli alunni o dei gruppi l'insegnante pone la prima domanda: "*In quale soluzione vi riconoscete e perché?*" In questa fase l'insegnante deve porre l'accento su convergenze e conflitti, riprendere i ragionamenti degli alunni e aiutarli a completarli o ad esplicitarli in modo sufficientemente chiaro per se stessi e per i compagni, dare forma alla comunicazione invitando tutti gli alunni ad esprimersi, introdurre quando possibile espressioni linguistiche corrette...
Gli alunni d'altro canto devono sapere che non è obbligatorio riconoscersi nel proprio prodotto ma anche esprimendo il proprio accordo con le soluzioni date dai compagni bisogna saper motivare la propria scelta, devono accettare i propri errori, avere consapevolezza che la conoscenza si costruisce collettivamente, non è patrimonio solo di qualcuno. Tutto ciò è strettamente connesso con il clima che si è instaurato in classe e richiede dei tempi, non si costruisce da un momento all'altro ma attraverso una pratica costante.
L'attenzione dell'insegnante è orientata al processo quindi deve aiutare gli alunni ad esplicitare chiaramente non solo il risultato del loro lavoro, ma anche come ci sono arrivati e questo può essere stimolato da una seconda domanda: "*Che difficoltà avete avuto?"*

[27] alcune indicazioni sulla discussione matematica in classe si trovano nel testo Matematica 2001 pag. 31-32.
[28] il protocollo di gestione delle discussioni è tratto da Bartolini Bussi M.G., Boni, M., Ferri, F., (1995) Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, Centro di documentazione educativa, Comune di Modena Settore Istruzione.

Gli alunni devono spiegare come sono giunti alla soluzione parlando anche degli errori, dei tentativi andati a vuoto perchè sono le strategie errate, i passi falsi che aiutano a capire la genesi e il significato delle strategie seguite.
Per concludere la discussione occorre esplicitare il sapere che stava dentro la situazione problematica risolta e quindi l'insegnante chiede: "*Che cosa abbiamo imparato con questo problema?*"
Si tratta di esplicitare l'apprendimento, cioè il pezzo di sapere che si è andato costruendo, perché è indispensabile che gli alunni acquistino consapevolezza del proprio processo di apprendimento.
In questa fase di solito gli alunni più maturi tentano di fare generalizzazioni che l'insegnante deve cogliere perché conducono la classe verso il sapere decontestualizzato cioè verso l'obiettivo del suo lavoro. Nel caso in cui il livello della discussione diventi troppo elevato e alcuni alunni non seguano più, l'insegnante deve riportare la discussione su casi particolari, su esempi concreti, cioè deve imparare a gestire la dialettica fra casi generali (livello alto) e casi particolari (livello basso).
In ogni caso la conclusione spetta all'insegnante che, come depositario del sapere, darà una veste definitiva al sapere costruito. Si giunge così alla fase di istituzionalizzazione in cui si esplicita il sapere attraverso un testo collettivo, un cartellone.
Non sempre dopo la soluzione di un problema si arriva ad un apprendimento certo: in molti casi si è fatto solo un piccolo passo, si è raggiunto un sapere parziale che dovrà ancora essere ripreso da altri punti di vista. In tal caso è meglio sospendere l'istituzionalizzazione e rimandarla a momenti successivi, limitarsi a tirare le fila per mettere insieme il percorso fatto e preparare poi contro-esempi che mettano in crisi le concezioni errate ancora presenti negli alunni.
Per quanto riguarda la conduzione della discussione dovrebbe essere chiaro che le parole dette dall'insegnante (e anche gli sguardi, i gesti, la postura), determinate dalla intenzionalità delle sue azioni, influiscono sull'andamento della discussione. Per imparare a condurre una discussione è molto utile registrare per potersi riascoltare e riflettere sui propri interventi. Una prima riflessione da fare riguarda il numero di interventi che fa l'insegnante rispetto a quelli degli alunni: bisognerebbe fare il possibile per disattendere la regola per cui in una discussione in classe i due terzi degli interventi sono dell'insegnante e per la maggior parte sono domande![29]
Ma non basta: occorre anche comprendere quali tipi di interventi hanno un esito positivo e quali invece bloccano la discussione. La tabella, tratta dal testo di Bartolini Bussi[30], riassume le strategie comunicative che l'insegnante può mettere in atto per favorire la comunicazione tra gli alunni.

DOMANDA DIRETTA	(es. che cosa vuol dire…?
RICHIESTA DI SPIEGAZIONE	(es. cerca di esprimerti meglio)
DOMANDA D'AIUTO	a) completamento (richiesta di completare una frase interrotta)
	b) suggestiva (con valutazione implicita ad es. nel tono)
	c) chiusa (con risposta SI o NO)
	d) aperta (invito a riorganizzare il discorso, es. riproponendo una parte del discorso con in più una domanda)
RISPECCHIAMENTO	ripresa di un contributo informativo presente in una battuta senza aggiungervi una propria valutazione esplicita, ma, eventualmente, modificandone parzialmente la formulazione
	a) eco (ripetizione di un intervento breve)
	b) ricapitolazione (riassunto di più interventi)
	c) informazione (rispecchiamento con integrazione)

A mano a mano che si scende nella tabella le strategie risultano essere più adeguate allo scopo: infatti le domande dirette e le richieste di spiegazione di solito bloccano l'allievo, le domande di

[29] Flanders N.A., (1970) Analizing Teaching behavior, Addison, Wesley
[30] Bartolini Bussi M.G., Boni, M., Ferri, F., (1995), cit.

aiuto possono avere qualche effetto ma solo quelle di tipo d) e le varie forme di rispecchiamento risultano veramente efficaci.
Gli interventi di rispecchiamento hanno il pregio di non risultare valutativi nei confronti degli alunni, anzi li stimolano indirettamente ad esplicitare il loro pensiero, che è proprio ciò che si vuole ottenere. Sono quasi dei "trucchi" verbali che nella dinamica del discorso spingono in una certa direzione. Ad esempio se un alunno fa un intervento significativo, che potrebbe condurre ad una fase produttiva della costruzione del sapere, è sufficiente che l'insegnante inizi la frase con "*Tu dici che ...*" riproponendo l'enunciato dello studente per far capire sia allo studente sia alla classe che quella cosa è importante e va tenuta presente, e questo già di per sé può stimolare altri interventi. In altri casi il semplice eco non basta, occorre rielaborare in parte il pensiero di un alunno o di più alunni per dargli una veste più consona, eliminando parti non coerenti e fornendo parole più adatte.[31] Sono modalità che l'insegnante più avveduto pratica già normalmente, ma se acquisisce maggiore consapevolezza e dà maggiore intenzionalità alle sue azioni, il risultato di apprendimento sarà ancora migliore.

[31] nella parte introduttiva del testo Matematica 2001 pag. 31-37 è presentato un esempio di discussione matematica svolta durante un'attività sui numeri decimali

La ricerca azione
che cosa è ... come si fa ...

In questa comunicazione abbiamo concentrato tante idee che andrebbero ulteriormente approfondite ed esplicitate. Ci auguriamo che questo sia solo l'inizio di un percorso di ricerca-azione che potremo avviare nei prossimi mesi.
L'idea che vorremmo condividere con voi, prima di avviare qualsiasi nuova attività, è che in un progetto di R-A la ricerca e la realtà di classe si incontrano e l'insegnante (individualmente o in gruppo), come protagonista della prassi educativa, inizia un percorso di riflessione che nasce da una sua esigenza di miglioramento. Se questa idea non viene condivisa non può partire nulla di costruttivo. Ma allora quali possono essere le domande da cui partire?
Abbiamo provato a scriverne alcune:

- Ci sono delle nuove idee che vorrei provare/sperimentare nella mia classe?
- Cos'è che faccio in concreto nella mia classe?
- C'è una differenza fra quello che credo di fare e quello che veramente faccio?
- Come vivono la scuola i miei allievi?
- Cosa fanno in classe i miei allievi?
- Cosa stanno imparando? È quello che voglio che imparino?
- Vale la pena che imparino questo?
- …

Dentro questo quadro di ricerca si possono individuare diversi percorsi, ad esempio, facendo riferimento alle attività proposte:

- la gestione di una situazione problematica in classe secondo il protocollo presentato;
- la progettazione di un percorso didattico legato all'esplorazione del territorio con attività di matematizzazione che partano dalla realtà degli studenti;
- riflessioni sulle dinamiche relazionali insegnante-studente in situazioni a-didattiche.

Altri potranno emergere da un confronto che farete nelle vostre realtà scolastiche facendo riferimento ai vostri interessi e alle problematiche che in questo momento vi sembrano più attuali e/o condivisibili.

Terza parte
INTERVALLI MATEMATICI

Il gioco delle 13 graffette

MATERIALI: 13 graffette.

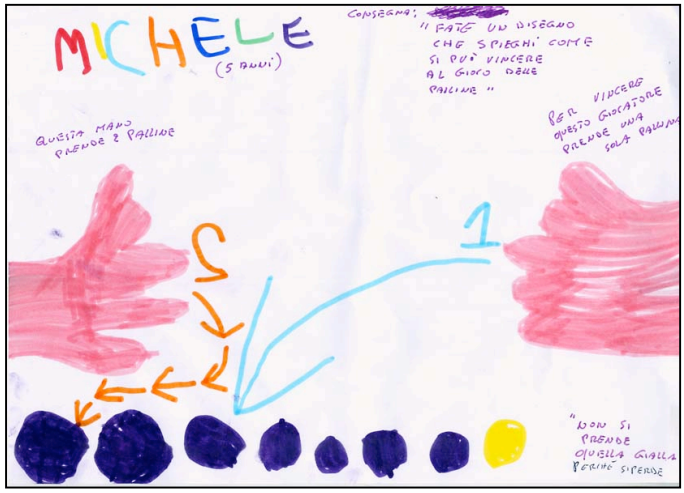
CONSEGNE
Si gioca in coppia.
A turno, ogni giocatore può prendere 1, 2 o 3 graffette.
Perde chi prende l'ultima.

Giocate alcune partite e poi ognuno di voi espone all'altro le strategie che ha seguito per cercare di vincere.
Ora provate a rispondere alle seguenti domande:

- esiste una strategia da seguire per essere sicuri di vincere qualunque mossa faccia l'avversario?
- chi gioca per primo è avvantaggiato o no? Perché?

Scrivete su un foglio la strategia su cui vi trovate tutti d'accordo utilizzando rappresentazioni, formule … tutto ciò che vi sembra importante per far capire la strategia seguita.

Ecco un esempio di protocollo[32] di un bambino di 5 anni che ha disegnato il momento finale del gioco, dimostrando di aver capito che se l'avversario rimane con 5 palline ha perso, infatti dice: "*Per vincere questo giocatore prende una sola pallina*" e indica con la freccia azzurra la sestultima pallina. Colora poi in giallo l'ultima pallina che determina la perdita dell'avversario.



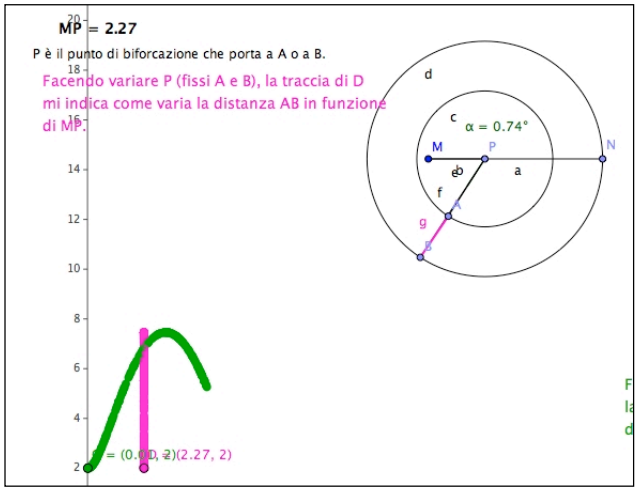
Alunni più grandi possono giungere a livelli ulteriori di formalizzazione fino a individuare la formula algebrica che rappresenta la generalizzazione del gioco al variare del numero totale di palline e del numero di palline che si possono prendere ad ogni mossa.
In ogni caso esiste sempre una strategia vincente.

[32] disegno di alunno di una scuola dell'infanzia comunale di Torino

Itinerari in bicicletta

CONSEGNE
Quanto possono distare tra loro le città di Cavour e di Macello?
Spiegate la strategia che avete seguito per determinare la distanza tra i due paesi.
Quali sono le conoscenze matematiche che potrebbero mettere in gioco i vostri alunni nel processo risolutivo?
Pensate ad un possibile percorso didattico con l'utilizzo di immagini fotografiche della vostra città.

Una modellizzazione del problema usando un software di geometria dinamica[33].
Oltre alla rappresentazione delle distanze sui cerchi e la possibilità di spostare con il mouse i punti per esplorare tutti i casi possibili, in basso a sinistra compare il grafico della funzione su cui sono individuabili i massimi e i minimi che assume.



[33] Il software si chiama Geogebra. È open source ed è scaricabile gratuitamente dal sito http://www.geogebra.org/

BIBLIOGRAFIA

Aglì, F., Martini, A. (1989). Spazio, tempo, eventi: proposte ed esperienze per la scuola dell'infanzia, Roma, Armando

Aglì, F., Martini, A. (1995). Esperienze matematiche nella scuola dell'infanzia, Firenze, La Nuova Italia

Alibali, M. W., Di Russo, A. A. (1999). The function of gesture in learning to count: more than keeping track, Cognitive Development, 14, 37-56

Alibali, M.W., Kita, S., Young, A.J. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. Language and cognitive processes, 15 (6), 593-613

Antinucci, F. (2001). La scuola si è rotta. Roma-Bari, Editori Laterza

Arsac, G., Germain, G., Mante, M., (1988). Problème ouvert e situation-problème, Institut de Recherche pour l'einsegnement des mathematiques Academie de Lyon, Université Claude Bernard, Lyon 1

Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories. Proceedings of ICME 10, July 4-11, Copenhagen

Bartolini Bussi, M.G, Boni, M., Ferri, F. (1995). Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica, Rapporto tecnico n. 21 Modena

Briand, J. (1993). L'énumération dans le dénombrement des collections: un dysfonctionnement de la transposition didactique, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I, Directeur de Thèse: M.

Brousseau, G. (2000). L'insegnamento della matematica nella scuola dell'obbligo: micro e macro-didattica, in Didattica della Matematica nel III millennio a cura di D'Amore B., Atti del 14° Convegno di Didattica della matematica di Castel San Pietro Terme, Bologna, Pitagora Editrice

Brousseau G., (2000). Elementi per una ingegneria didattica, Bologna, Pitagora Editrice

Caldelli, M. L. D'Amore, B., Giovannoni, L. (1989). Il bambino matematizza il mondo: esperienze problematiche nella scuola dell'infanzia, Firenze, La Nuova Italia

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, La Penseé Sauvage, Grenoble

CREM (1995). Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques, L. Grugnetti & V. Villani (it. ed.), La matematica dalla scuola materna all'Università, Pitagora Editrice

Demattè, A., Furinghetti, F., (2003) Risposte affettive e cognitive al compito "dipingo la matematica" , La Matematica e la sua Didattica , n. 3, 305-326.

Furinghetti, F. (1998). Vita in classe e immagine della matematica, Atti Congresso nazionale L'Aquila, 19-20-21 ottobre

Gelman, R., Gallistel, C. R. (1978). The Child's Understanding of Number, Harvard University Press

Goldin-Meadow, S. (1999). The role of gesture in communication and thinking, Trends in Cognitive Sciences, 3, 11, pp. 419-429.

Kita, S. (2003). Pointing: where language, culture and cognition meet. Mahwak, NJ: Lawrence Erlbaum

Lakoff, G., Nùñez, R. (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Basic Books (trad. Italiana, Da dove viene la matematica. Metafora e astrazione nel progresso cognitivo, Torino, Bollati Boringhieri)

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E. (2002). Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del "capire i numeri", Giornale Italiano di Psicologia a.XXIX, n.4, dicembre

Lumbelli, L. (a cura di). (1994). Pedagogia della comunicazione verbale, Milano, Angeli,

Lurçat, L. (1980). Il bambino e lo spazio: il ruolo del corpo, Firenze, La Nuova Italia

Tahan, M. (1996). L'uomo che sapeva contare, Milano, Salani

Mazzoli, P. (a cura di) (2005). Capire si può. Educazione scientifica e matematica, Roma, Carocci Faber

McNeill, D. (1992). Hand and mind. What gestures reveal about thought, The University of Chicago Press

McNeill, D. (2000). Language and Gesture: Window into thought and action, Cambridge University Press
Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica, (2001) Matematica 2001. La matematica per il cittadino, Liceo Scientifico Statale A. Vallisneri, Lucca, Aprile – Ottobre 2001
NCTM, (2000). Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Standards 2000
Nemirovsky, R. (2003). Three Conjectures concerning the Relationship between Body Activity and Understanding Mathematics. In: N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (eds.), Proceedings of PME 27, 1, 103-135.
Ogden, C.K., Richards, I.A., (1923) The meaning of meaning
Piaget, J., Szeminska, A. (1976). La genesi del numero nel bambino, Firenze, La Nuova Italia
Pontecorvo, C., Ajello, A. M., Zucchermaglio, C. (1991). Discutendo si impara: interazione sociale e conoscenza a scuola, Roma, La Nuova Italia Scientifica
Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70.
Robutti, O. (2004). Apprendimento percettivo-motorio dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore, in: B. D'Amore e S. Sbaragli (eds.) La didattica della matematica: una scienza per la scuola, Convegno Castel S. Pietro Terme, 29-38
Robutti, O., Ghirardi, S. (2004). Dai moti alle rappresentazioni simboliche: un'esperienza nella scuola elementare, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.27A-B, n.5, 577-616
Schoenfeld, A. (1992). "Learning to think matematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics" in A.D. Grows(ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching, 334-370
Steinbring, H., (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction An Epistemological Perspective, Springer-Verlag New York
Vergnaud. G. (1994). Il bambino, la matematica, la realtà, Roma, Armando Editore
Vygotskij, L.S. (1972). Immaginazione e creatività nell'età infantile, Roma, Editori Riuniti,
Vygotskij, L.S. (1980). Il processo cognitivo, Torino, Boringhieri,
Vygotskij, L.S. (1992). Pensiero e linguaggio (a cura di L. Mecacci), Bari, Laterza,
Vygotskij, L.S. (1981). The genesis of higher mental functions. In: J.V. Wertsch (ed.), The concept of activity in Soviet psychology. Armonk, NY: M.E. Sharpe, 144-188
Zan, R. (2007), Difficoltà in matematica, Osservare, interpretare, intervenire, Springer Verlag Italia

SITOGRAFIA

http://www.umi.dm.unibo.it/ (sito dell'Unione Matematica Italiana)
http://www.siscas.net/matabel/ (sito del Progetto M@t.abel)
http://www2.polito.it/didattica/polymath/ (sito del Progetto Polymath)
http://matematica.unibocconi.it/ (giochi matematici della Università Bocconi di Milano)
http://www.kangourou.it/ (sito di Kangourou Italia - gare di matematica)
http://www.math.it/index.htm (attività e materiali di matematica)
http://utenti.quipo.it/base5/index.htm (matematica ricreativa)
http://www.matematicamente.it/ (storia della matematica, recensioni di libri, giochi, assistenza online, e contributi dei visitatori)
www.pernigo.com/math/ (risorse di matematica, algebra, aritmetica e geometria per la scuola, materiali didattici, dispense ed esercizi risolti)
http://www.nctm.org/standards2000/ (sito dell'NCTM)

Patrizia Laiolo, patrizia.laiolo@unito.it Donatella Merlo, donatellamerlo@tiscali.it