MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA
UFFICIO SCOLASTICO REGIONALE PER L'ABRUZZO

SEMINARI PROVINCIALI DI FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

I CURRICOLI DISCIPLINARI

"IL LABORATORIO DI MATEMATICA DAI 3 AI 14 ANNI"
10-11-12-13 settembre 2008

Patrizia Laiolo   Donatella Merlo
Nucleo di Ricerca Didattica Dipartimento di Matematica Università di Torino

"Ogni studente suona il suo strumento, non c'è niente da fare. La cosa difficile è conoscere bene i nostri musicisti e trovare l'armonia. Una buona classe non è un reggimento che marcia al passo, è un'orchestra che prova la stessa sinfonia. E se hai ereditato il piccolo triangolo che sa fare solo tin tin, o lo scacciapensieri che fa soltanto bloing bloing, la cosa importante è che lo facciano al momento giusto, il meglio possibile, che diventino un ottimo triangolo, un impeccabile scacciapensieri, e che siano fieri della qualità che il loro contributo conferisce all'insieme. Siccome il piacere dell'armonia li fa progredire tutti, alla fine anche il piccolo triangolo conoscerà la musica, forse non in maniera brillante come il primo violino, ma conoscerà la stessa musica."

Daniel Pennac, Diario di scuola, Milano, Feltrinelli, 2007

SOMMARIO

Prima parte
ESEMPI DI ATTIVITÀ

"Che cosa si può contare"
La comprensione del numero e della misura nella scuola dell'infanzia

La nostra comunicazione riguarderà il Numero visto nel suo sviluppo dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di I grado. Gli esempi di attività che faremo servono per dimostrare come, attraverso la risoluzione di situazioni problematiche, si possa giungere alla ri-costruzione da parte degli alunni dei saperi matematici. Al termine daremo qualche riferimento di tipo teorico ma soprattutto alcune indicazioni pratiche per la gestione delle situazioni problematiche e la conduzione di una discussione matematica in classe. Infine offriremo qualche spunto di riflessione sulla ricerca azione in modo che possiate cominciare, nelle diverse realtà scolastiche, a confrontarvi su alcuni percorsi possibili.

Che cosa dicono i bambini

Per introdurre il tema del Numero pensiamo sia interessante sentire che cosa dicono bambini di sei anni intervistati dalla loro insegnante nei primi giorni di scuola.[1] Sono state scelte alcune risposte tipo tra le tante fornite dagli alunni.

Che cosa vuol dire contare?
- "*se conti le lettere, se vedi che sono 15, quello vuol dire contare*"

Perché si conta?
- "*per conoscere i numeri*"
- "*per imparare a contare*"

Fino a quanto si può contare?
- "*più si conta e più si va avanti*"
- "*dopo il 99 ci sarà un altro numero … e poi un altro … anche se io non li conosco*"
- "*i numeri sono come i microbi di questa classe: non finiscono mai*"
- "*si conta fino a quando l'aria non finisce e allora tu muori*"

Come si fa a contare?
- "*bisogna avere memoria*"
- "*bisogna ricordare come hai già fatto, perché se non ti ricordi, poi devi ricominciare a imparare*"
- "*bisogna conoscere i soldi*"

Che cosa si può contare?
- "*gli anni del tempo … le ore*"
- "*i kilometri … la febbre*"
- "*i nomi sulle cartine … le persone …*"
- "*gli zaini … le lettere … i cani*"

Che cosa non si può contare?
- "*le stelle perché sono troppe*"
- "*le macchine perché sono troppo veloci*"
- "*i raggi del Sole perché fanno venire lo starnuto*"
- "*la pioggia perché è troppo veloce e se conti veloce ti sbagli*"
- "*le fate perché non esistono*"
- "*la Luna … il Sole … il mare … perché è uno*"
- "*le nuvole perché si mettono attaccate*"
- "*il cielo perché è in tutto il mondo*"
- "*il mare perché è tutto attaccato*"

[1] Ins. Attilia Cometto, Scuola Primaria L. Pirandello, Coazze (TO)

Come si fa a contare quello che non si può contare?

- "*se vuoi proprio contare il mare puoi contare le onde*"
- "*conti le gocce d'acqua che cadono piano*"
- "*puoi mettere l'acqua in un bicchiere e conti quanti bicchieri riempi*"
- "*conti quante gocce ci stanno in un bicchiere e poi conti i bicchieri oppure usi un cucchiaio*"

Che cosa rispondono i matematici?

L'aritmetica è nata:

- per contare le grandezze discrete cioè tutto ciò che ha un confine nello spazio o che ha un inizio e una fine nel tempo;
- per l'esigenza di rendere "contabile" il continuo attraverso operazioni di discretizzazione (contare l'acqua con le gocce, i cucchiai, i bicchieri; contare il "camminare" con i passi; ecc.).[2]

Le risposte dei bambini comprendono tutti e due questi elementi perché a sei anni esiste già una buona competenza sui numeri. Soprattutto è interessante notare come nei loro esempi compaiano grandezze dei due tipi, continue e discrete, e come essi sappiano correttamente indicare le strategie per contare anche in questo secondo caso.

Un problema per cominciare

L'attività di cui parleremo ora si può proporre con qualsiasi tipo di materiale: in base alla situazione i bambini adatteranno il loro modello di conteggio e ciò vi permetterà di capire a che punto sono nella loro conoscenza dei numeri. Contemporaneamente potrete, attraverso l'interazione tra pari, mediata dai vostri interventi, cominciare a far evolvere le loro conoscenze ancora imperfette verso il sapere matematico ancora da costruire. È un'attività che funziona sia come test di avvio sia come momento di costruzione di conoscenza: è importante però che i bambini ripetano più volte queste esperienze con oggetti e materiali diversi.
Ecco un possibile elenco di materiali: tappo di sughero, bottiglietta con acqua con tappo, arancia, penna biro con scritte, pongo, foglio di carta a quadretti, foglio di carta bianco, cordicella, pacchetto di farina gialla, scatola di caramelle...
La consegna dovrebbe essere questa: "*Che cosa si può contare in questo oggetto? Contate e rappresentate sul foglio il vostro conteggio in modo che si capisca che cosa avete contato e come.*"
La seconda parte della consegna è importante come la prima perché richiede una rappresentazione dell'esperienza non generica ma finalizzata a comunicare le proprie strategie di conteggio, a renderle quindi più esplicite non solo per gli altri ma anche a se stessi.

Per chiarire meglio l'attività e aiutarvi a comprenderne il significato e le potenzialità, vi proponiamo alcuni esempi di protocolli prodotti da alunni di scuola dell'infanzia.
Il primo esempio riguarda un'esperienza di conteggio di un pacchetto di farina gialla.[3] I bambini, un piccolo gruppo in questo caso perché l'insegnante voleva registrare i loro interventi, sono seduti intorno ad un tavolo, al centro c'è il pacchetto.
L'insegnante dà la consegna e i bambini iniziano a discutere tra di loro. Ecco alcuni momenti significativi della discussione.

C: è tantissima!
M: è cinque! (conta con il dito dei livelli immaginari, dividendo il sacchetto in 5 parti)
C: ma no, io conto quattro (sempre con il dito divide in quattro parti)
M: allora sono 4 litri!

---

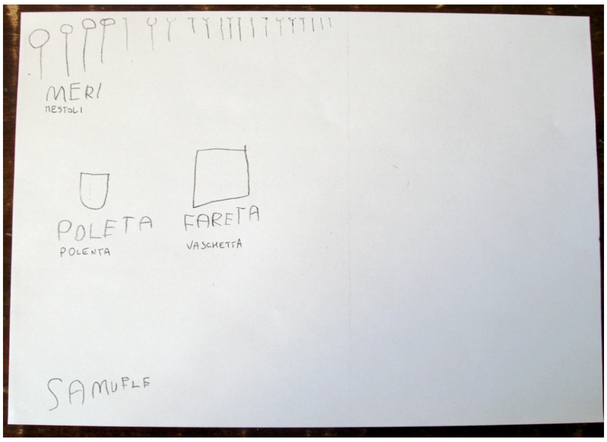
[2] Mazzoli, P., Dare i numeri al mondo, IRSSAE Lazio Corso di aggiornamento 1999/2000 "La continuità in matematica" Riflessioni e percorsi di ricerca dopo quattro anni di lavoro nelle scuole dell'infanzia di Modena1 e del Distretto Scolastico di Scandiano2 (RE).
[3] Ins. Luisa Ballesio, Scuola dell'infanzia comunale G. Deledda, Torino

Il pacchetto è ancora chiuso, è uno, o meglio è un qualcosa che bisognerà rendere contabile. Che cosa bisogna fare per contarlo? Fare delle parti, discretizzare… Immediatamente gli alunni fanno riferimento ai modelli suggeriti dal contesto che è famigliare per loro: chissà quante volte hanno visto la mamma prendere un pacchetto di farina bianca o gialla, aprirlo e poi fare cucchiaiate o manciate del suo contenuto! Fin dall'inizio usano lo strumento che hanno a disposizione: le mani. Quando il pacchetto è chiuso con i gesti indicano livelli immaginari e iniziano a fare le parti. Subito c'è un conflitto tra chi conta 5 e chi conta 4 usando una strategia diversa per fare i livelli. Questi momenti di conflitto sono importantissimi per l'insegnante perché sfruttandoli avvia un processo di negoziazione che porta, ad esempio, alla definizione di regole per fare le parti. Questo è un ottimo avvio per la misura. Ma la competenza dei bambini è già notevole perché il contesto suggerisce loro anche l'uso del numero come misura: infatti lo abbinano ad un nome di misura che conoscono e in questa situazione ha anche senso perché è una misura di volume.
....
S: dentro la conti "mezzo" fino a qui (indica con il dito la metà del sacchetto)
C: sì, fai metà e conti tutta questa e poi questa ... (indica la parte sotto, indica a metà e sopra)
M: e allora sono due… (indica con il dito in alto e basso)
....
Compaiono spontaneamente le parole "mezzo", "metà": se un "uno" viene fatto a pezzi e i pezzi sono due bisogna usare le parole delle frazioni!
La situazione cambia quando il pacchetto viene aperto.

M: ma possiamo anche farlo con il cucchiaio…
L: con un cucchiaio?
......
L: hai preso il cucchiaio?
M: no, è il mestolo!
....
A: ho io il mestolo, poi te lo passo… (A. inizia a prendere la farina con il mestolo, i compagni tengono il sacchetto, contano mentre la farina viene versata nel contenitore, C. conta senza aspettare il mestolo successivo, anche F. è veloce…)
A: aspetta, siamo a tre!!
M: aspettiamo a contare quando la versa giù…
....
In questo brano emerge un'altra regola necessaria al contare: se non si vuole sbagliare bisogna sincronizzare le mosse, che si fanno per fare i pezzi, con le parole che si dicono, i nomi dei numeri. È una regola importantissima, non tutti i bambini di scuola dell'infanzia riescono a tenere questo sincronismo e l'insegnante (o un compagno più esperto) dovrà all'occorrenza prestare loro la mano per far padroneggiare poco per volta questa procedura.

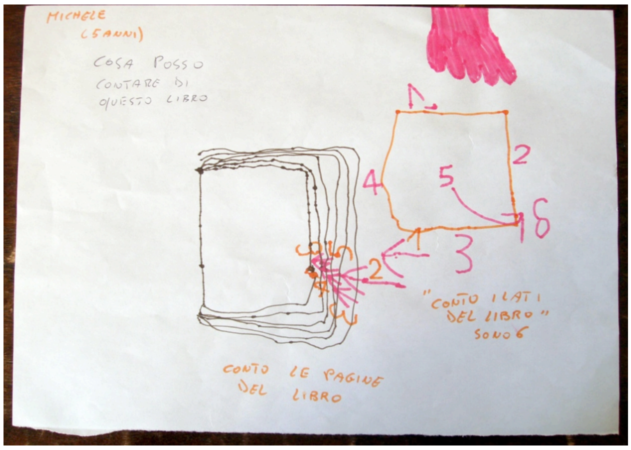
S: ne abbiamo contati venti
A: sì, venti chili
L: venti chili?
M: no, venti mestoli!

Un alunno usa un altro nome di misura: toccare la farina, sentirne le caratteristiche materiali richiama altri contesti e suggerisce forse l'uso della parola "chili". M. però precisa che non si tratta di chili ma di "mestoli" e quindi mette l'ultimo tassello mancante all'idea di misura: dopo il numero bisogna dire il nome dell'unità di misura effettivamente utilizzata, i mestoli, che vengono anche disegnati correttamente sul foglio.



Nel disegno compaiono anche parole: questo ci dice quanto sia importante non separare il momento dell'apprendimento della scrittura da quello dell'apprendimento della matematica, si deve "scrivere di matematica" fin dall'inizio, all'occorrenza sarà la maestra a scrivere sotto dettatura da parte del bambino ma è importante che gli alunni percepiscano che la matematica si fa parlando e scrivendo, usando il linguaggio.

Questa nuova situazione[4] (contare un libro) suggerisce nuovi modi di contare, più legati al discreto perché le pagine sono parti ben individuabili, i lati (facce del libro-parallelepipedo) hanno un confine preciso. Per far "capire" il conteggio, quali elementi sono stati contati, occorre una buona competenza nel rappresentare.



Per contare un dinosauro[5] occorre classificare, individuare dei sottoinsiemi di elementi contabili e ogni volta far ripartire la conta da uno. È interessante come Milla abbia messo in evidenza il ruolo delle dita della mano nel contare, la necessità di operare questa corrispondenza biunivoca tra i due insiemi (dita e elementi contati). La notazione simbolica, cioè la scrittura dei numeri è imperfetta, il 2 è una specie di 5 rovesciato, ma la sequenza fino a 5 è sicuramente padroneggiata e usata in modo corretto

La ricchezza di queste situazioni è evidente. L'insegnante può partire da questa attività per ampliare e consolidare i concetti messi in gioco e costruire competenze stabili perché nate in contesti che avevano senso per i bambini.

A che cosa serve questa attività?

Gli obiettivi e i contenuti matematici che sottostanno a questa attività sono numerosi. Proviamo ad elencarne alcuni:

- formulare ipotesi su che cosa è "contabile" e su come si fa a contarlo
- confrontare grandezze continue con grandezze discrete
- capire che per contare bisogna "discretizzare" le quantità continue e imparare le procedure per discretizzare (misurare)
- trovare strategie per contare "numeri grandi"
- imparare a "segnare" per non perdere il conto

[4] Ins. Tiziana Lucco, Scuola dell'infanzia comunale Strada ai Ronchi, Cavoretto, Torino
[5] Ins. Luisa Ballesio, Scuola dell'infanzia comunale G. Deledda, Torino

- capire il significato di unità, di metà, mezzo...
- sviluppare la capacità di verbalizzazione in matematica

Dopo aver fatto alcune esperienze con oggetti di tipo diverso si possono porre queste domande ai bambini: è lo stesso contare pongo o contare caramelle? Per contare acqua e contare farina gialla si fa nello stesso modo? Cosa c'è di uguale e cosa c'è di diverso? Dal confronto fra i diversi modi di contare i bambini possono trarre le loro prime generalizzazioni che consistono nel trovare i tratti comuni, le somiglianze che esistono tra il conteggio di quantità discrete e quello di quantità continue. In questo modo vengono guidati verso l'astrazione.

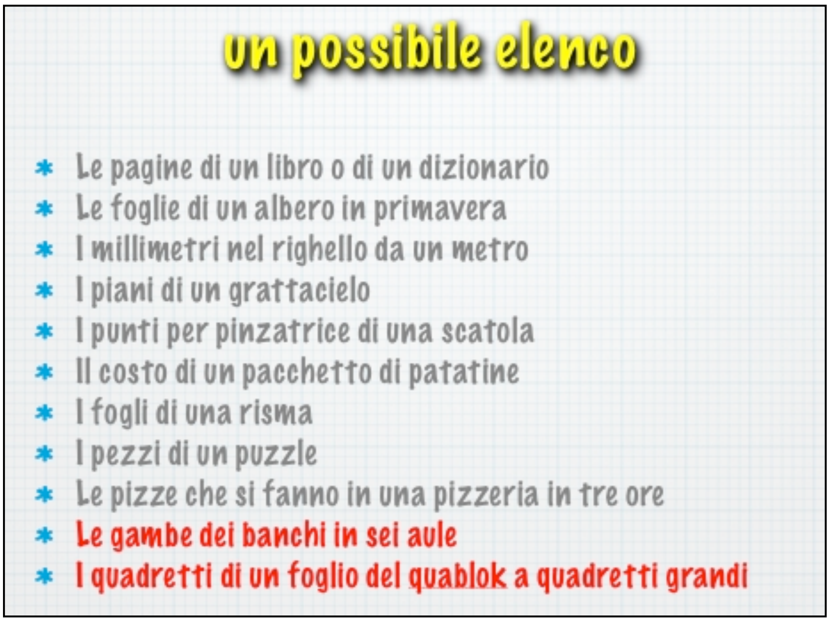
Per organizzare un percorso didattico, che porti alla comprensione del numero, occorre fare riferimento ai modelli teorici proposti dagli psicologi dell'apprendimento.
Secondo Piaget il concetto di numero si fonda su quelli di classificazione e seriazione, per cui se questi concetti non si sono ancora formati il bambino non ha gli strumenti per comprendere il significato del numero. Ma oggi sappiamo che il concetto di numero dei bambini che arrivano alla scuola dell'infanzia è in realtà una combinazione di idee innate e di fatti culturali e che risulta fondamentale il ruolo svolto dal linguaggio. L'insegnante deve quindi proporre attività di conteggio in contesti significativi per l'alunno, prestando attenzione all'interazione tra pari, in modo che l'uso del linguaggio matematico e delle notazioni simboliche sia sempre fortemente motivato.
Per introdurre il discorso sul conteggio non si può non fare riferimento al modello proposto da R. Gelman e C. R. Gallistel (1978) secondo cui i bambini piccoli, in età prescolare, possiedono un concetto innato di numero, che si evolve nell'acquisizione delle procedure di calcolo. Però, a differenza degli adulti, i bambini piccoli non possono fare ragionamenti numerici senza fare riferimento alla rappresentazione di quantità specifiche (piccole) e ottengono queste rappresentazioni mediante il conteggio.
Un'idea importante che proviene dalle ricerche di Gelman & Gallistel, che ci permette di differenziare ulteriormente il concetto di numero dei bambini dal concetto adulto, è questa: i bambini piccoli contano anche se non usano i nomi di numero convenzionali o la convenzionale sequenza di conteggio. Se la filastrocca dei numeri non è quella convenzionale ma è accompagnata dai gesti corretti, il bambino sta effettivamente contando. Occorre però che questa sequenza sia usata sempre nello stesso modo cioè sia stabile, come vedremo tra poco. In questo senso le conte infantili utilizzate per decidere i turni di gioco sono modi di contare esattamente come quelli con i numeri.
Secondo Gelman & Gallistel l'abilità del contare è governata da 5 principi fondamentali che ora esporremo brevemente.
Il primo principio è il *principio uno-uno* cioè ogni oggetto di una serie deve essere segnato con etichette (contrassegni) distinte. Per dimostrare di possedere questo principio il bambino deve saper coordinare due processi: suddividere gli oggetti fra quelli contati e quelli da contare e etichettare gli oggetti man mano che li conta. I possibili errori sono: etichettare un elemento più di una volta o saltarne uno, usare la stessa etichetta più di una volta oppure non coordinare i due processi.
Il secondo principio è il *principio dell'ordine stabile* per cui le etichette che si usano devono essere scelte o sistemate in un ordine ripetibile. Quali difficoltà può avere un bambino molto piccolo nell'usare questo principio? Potrebbe scegliere una serie di etichette non abbastanza lunga rispetto a quanto richiesto dagli elementi della serie da contare oppure potrebbe non ricordare una lista lunga e stabile di nomi arbitrari come quelli dei numeri. Per facilitare la memorizzazione, i numerali comunemente usati hanno una regola generativa per cui diventa automatico ricordare che dopo venti viene vent-uno e poi venti-due, dopo trenta vengono trent-uno trenta-due ecc. I numeri da dieci a venti, che non seguono del tutto la regola, sono i più difficili da memorizzare: undici = uno e dieci, dodici = due e dieci, tredici = tre e dieci… ma poi diciassette = dieci e sette e così via. La parola "venti" non ci ricorda sicuramente il numero due, per dire due decine sembra molto più adeguata la parola dodici che può far venire in mente "due dieci".

Il terzo principio è il *principio della cardinalità*: l'etichetta finale di una serie ha un significato speciale e cioè rappresenta la proprietà numerica dell'insieme, il nome formale è il cardinale dell'insieme. Secondo Gelman & Gallistel un bambino che conta e, alla fine della conta, ripete l'ultimo numero (ad esempio se dice: uno due tre … tre), possiede questo principio, perché la ripetizione dell'ultimo nome di numero è un indice del fatto che a quel numero viene attribuito un ruolo diverso. Consideriamo questi due comandi: "Prendi tanti oggetti quanti ne vedi in questa collezione" e "Prendi 8 oggetti". Mentre con il primo si chiede di confrontare un insieme con un altro facendo un'operazione di corrispondenza uno a uno per cui il bambino non deve necessariamente conoscere il cardinale dell'insieme di partenza, il secondo richiede sicuramente l'uso del principio di cardinalità perché il bambino deve prima contare otto oggetti e poi prenderli tutti e otto, cioè deve sapere che la parola otto indica la numerosità di tutto l'insieme che ha contato.
Il quarto principio è il *principio di astrazione* secondo cui i principi precedenti possono essere applicati ad ogni serie o collezione di entità. Questo significa che tutto ciò che si può in qualche modo separare, discretizzare, può essere contato.
Il quinto principio è il *principio di irrilevanza dell'ordine* cioè non importa da che elemento comincia tanto il risultato del conteggio non cambia. In altre parole il bambino deve prendere coscienza dell'arbitrarietà della procedura di conteggio. Questo non è affatto scontato per bambini molto piccoli perché essi potrebbero tendere ad attribuire il numerale ad un oggetto specifico.
Negli anni successivi agli studi di Gelman & Gallistel molti altri ricercatori hanno ulteriormente approfondito il problema di come nei bambini si viene formando il concetto di numero attraverso il conteggio e molte di queste ricerche si possono reperire nella letteratura[6]. Nel nostro gruppo, per alcuni aspetti, facciamo riferimento alle idee esposte da J. Briand[7], nella sua tesi di dottorato.
Contando sovente i bambini sbagliano ma, come osserva Briand, non sempre i loro errori sono da attribuire alla mancanza di qualche principio di conteggio. Molto spesso gli errori dipendono dal fatto che certe abilità che sottostanno al contare non sono oggetto di insegnamento. Prima di contare il bambino deve innanzitutto concepire la collezione non come un oggetto materiale, ma come modo di pensare degli oggetti, e, in secondo luogo, deve organizzare la collezione, cioè trovare una strategia per esplorarla. Quindi il conteggio non deve partire immediatamente. Allineare, raggruppare, separare, organizzare su righe e colonne gli elementi di una collezione, etichettare gli elementi a mano a mano che si contano, sono abilità che possono essere insegnate se un bambino non dimostra di padroneggiarle. Ad esempio non tutti i bambini fanno uso spontaneamente di segnature, quindi compito dell'insegnante è rinforzare l'uso di segnature personali per separare gli elementi contati da quelli da contare e contemporaneamente far esplicitare e condividere nel gruppo classe le diverse strategie per arrivare a definire quella più veloce e più sicura.
Ricerche più recenti che fanno riferimento alla teoria dell'embodiment[8] riguardano la funzione del gesto nel contare. L'uso del gesto, fortemente integrato con il parlato, riduce il carico cognitivo che gli alunni devono sopportare per ricordare la sequenza dei numeri e coordinare i movimenti con le parole. Il gesto rende molto evidente la segmentazione e aiuta i bambini nel collegare i nomi dei numeri agli oggetti, quindi l'accuratezza del conteggio aumenta quando gli oggetti vengono materialmente toccati. La gestualità può anche ridurre gli effetti negativi dovuti alla limitatezza della memoria di lavoro dei bambini piccoli: se una parte della memoria di lavoro viene esternalizzata mediante i gesti, rimangono più risorse disponibili per le operazioni richieste dal principio uno-a-uno.

[6] una sintesi di queste ricerche è contenuta nell'articolo di Lucangeli, D., Tressoldi, P. E. (2002). Lo sviluppo della conoscenza numerica: alle origini del "capire i numeri", Giornale Italiano di Psicologia a.XXIX, n.4, dicembre
[7] Briand, J. (1993). L'énumération dans le dénombrement des collections: un dysfonctionnement de la transposition didactique, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux I, Directeur de Thèse: M. Guy Brousseau
[8] Alibali, M. W., Di Russo, A. A. (1999) The function of gesture in learning to count: more than keeping track, Cognitive Development, 14, 37-56

“Quanto è grande mille”
La stima degli ordini di grandezza in una classe terza

Questa è un’attività complessa che si suddivise in diverse fasi. La prima fase serve per creare il contesto, cioè per far capire agli alunni che tipo di problemi si dovranno affrontare. Il contesto è interno alla matematica, riguarda i numeri e il conteggio.[9]
La domanda posta inizialmente alla classe è: “*Pensando al numero mille, che cosa vi viene in mente?*” Immediatamente, da questa domanda, prende avvio una discussione durante la quale gli alunni mettono a confronto le loro idee sul mille: dal conflitto che emerge, dalle differenti ipotesi che formulano l’insegnante può già ricavare informazioni utili sulle idee di partenza e capire meglio come procedere nelle fasi successive.
In seguito viene posto un problema più specifico che serve a far percepire l’ordine di grandezza del mille se pur in un contesto particolare.
L’insegnante porta a scuola una guida telefonica (o un vocabolario, un volume di una enciclopedia… un oggetto tangibile quindi) e formula queste domande: “*Quante sono le pagine della guida telefonica di Torino? Saranno più o meno di mille? Come facciamo per controllare?*”
In questo caso gli alunni sono invitati a formulare ipotesi sulle strategie da seguire per controllare l’esattezza delle previsioni fatte. Questo serve per metterli in situazione, cioè per far capire loro che ciò che interessa non è solo la previsione, ma piuttosto la capacità di individuare un modo per verificarne la correttezza. Di solito gli alunni risolvono facilmente questa situazione dicendo che basta leggere il numero delle pagine, ma poi si accorgono che molte pagine non sono numerate, che ci sono a volte pagine fuori testo e quindi è necessario fare dei calcoli. Alcuni notano che se invece delle pagine vogliamo sapere quanti fogli ci sono, occorre dimezzare il numero e spontaneamente trovano modi di calcolare mentalmente la metà di questo numero che di solito è superiore al mille.
Un’ulteriore domanda ci porta nel vivo della situazione problematica: “*Quali cose possono essere circa mille?*”
Finora gli alunni hanno messo in gioco conoscenze che possedevano, l’obiettivo dell’insegnante però è di spingerli piano piano verso nuove conoscenze a cui possano arrivare con qualche aiuto adattando i modelli già posseduti per i numeri più piccoli a quantità maggiori.
In seguito alla domanda precedente può venire fuori un elenco simile a questo[10]:



L’insegnante partendo dall’elenco formula un problema: “*Mario dice che, secondo lui, le gambe dei banchi che ci sono in sei classi sono circa mille. Tu cosa pensi della sua ipotesi: è vera o falsa? Come pensi si possa verificare la sua ipotesi?*”

Per rispondere a questa domanda gli alunni producono dei protocolli individuali scritti: 6 alunni sostengono che l’ipotesi sia vera, 9 che sia falsa.
Alcuni supportano le argomentazioni con calcoli (anche con errori) facendo ipotesi sul numero dei banchi, degli alunni delle classi ecc.

[9] La stessa attività, adattata per una classe seconda, si trova nel testo Matematica 2001 nel nucleo Misurare con il titolo “Quanto è grande il cento”.
[10] Materiali provenienti dalla Scuola Primaria Collodi di Pinerolo Ins. Marta Bonadio e Corrado Bonnardel

Ad esempio Cristiano scrive: "*Io penso che l'ipotesi di Mario è falsa perchè con 6 classi le gambe risulterebbero 504 e ho calcolato tutte le 6 classi della scuola.*"
I calcoli necessari a dare la risposta sono stati fatti di volta in volta su una copertina della cartellina e cancellati per cui l'alunno non è riuscito a ricostruire come li aveva fatti. Invitato comunque a indicare i possibili calcoli scrive:
19X4 + 19x4 + 20x4 + 20x4 + 23X4 + 25X4 = 580
1°A 2°A 4°A 3°A 3°B 5°A
Cristiano fa riferimento alla sua realtà scolastica composta di 6 classi con quel numero di banchi e trova un numero inferiore a mille. Per fare mille bisogna quindi immaginare il doppio di classi.
Jenny invece ragiona in un altro modo, vuole trovare un numero di banchi e di classi che le permetta di fare subito mille. Scrive: "*Per me può essere vero perchè dipende anche da quanti banchi ci sono in ogni classe. In ogni classe meno due ci sono 50 banchi e in ogni banco ci sono 4 gambe e in due classi ci sono 25 banchi.*

50+50+ 50+50+25+25 = 500
doppio di 500 = 1000
25X4 = 100 (spiegherà che sono le gambe in una classe).
50X4 = 400 (sbaglia il calcolo e dice che sono le gambe di una classe)."

Interrogata sui calcoli si corregge così:

50X4 = 200
200x4 = 800 gambe (delle classi da 50)
100+100 = 200 (gambe delle classi da 25)
800+200 =1000

È evidente che il primo calcolo fatto fa Jenny non è matematicamente esatto, è la trascrizione di un ragionamento con simboli matematici, sottintende il 250 x 2 che probabilmente è stato eseguito solo mentalmente. Un insegnante poco attento ai processi direbbe che è tutto sbagliato. Ma così non è. L'insegnante chiede di rifare i calcoli con il suo aiuto e poco per volta guida l'alunna verso la meta. Con reciproca soddisfazione si scopre che il numero mille viene raggiunto; ma in questo protocollo, più dei calcoli, è interessante il procedimento usato e soprattutto l'uso del termine "dipende" che è una chiara allusione all'idea di variabile, idea che va coltivata fin dalla scuola primaria perché nel percorso scolastico successivo diventerà un'idea forte, trainante.
Dopo la risoluzione di questo semplice problema, l'insegnante rilancia l'attività nella classe proponendo una "vera" situazione problematica, cioè una situazione attraverso la quale le conoscenze degli alunni evolveranno verso nuovi saperi matematici.
Presenta agli alunni un foglio formato A4 con quadrettatura da 1 cm e dà questa consegna:
"*Quanti sono i quadretti di questo foglio? Scrivi come hai fatto a contarli*."
Anche in questo caso richiede un protocollo individuale scritto a cui segue una discussione collettiva in classe durante la quale si procede al confronto delle strategie e vengono posti nuovi problemi (es. come contare i mezzi quadretti?).
Lo stesso problema è stato posto in diverse classi, le risposte date dagli alunni sono differenti perché cambiano le conoscenze e le esperienze a cui fanno riferimento.
In una classe la maggioranza degli alunni ha sommato solo i quadretti interi di ogni riga: (20+20+20...=580 in una pagina, 580+580=1160 in tutto il foglio).
Giusi ha contato i mezzi quadretti come se fossero quadretti interi: 1364.
Maria ha messo insieme a due a due i mezzi quadretti e li ha sommati a quelli interi: 580 + 50= 630 630+630=1260.
Giacomo ha moltiplicato i quadretti delle due pagine insieme: 30+30=60 21+21=42 60x42=2520 senza accorgersi che così ha raddoppiato il numero di quadretti perché le pagine sono diventate quattro invece di due.
In un'altra classe pochi contano i mezzi quadretti, alcuni tentano subito di contare la moltiplicazione in colonna e inventano strategie, alcuni contano a mente la tabellina del 20 tenendo il conto con le dita o scrivendo 20 tante volte, alcuni scrivono sul foglio la conta per 20: 20 40 60 ... per 29 o 30 volte. Una bambina conta i quadretti uno per uno ma perde presto il conto...

Emergono saperi e non saperi, misconcetti e errori diventano occasioni per capire.
Di fronte alle difficoltà degli alunni l'insegnante si comporta come un maestro di bottega esperto con i suoi apprendisti, fa vedere come si fa, presta la mano quando serve, indica strade possibili partendo dalle cose che l'alunno, apprendista matematico, sa già fare.
Facciamo un esempio di questo apprendistato cognitivo. C'è un antefatto: un bambino è assente il giorno del problema, lo risolve quindi con l'insegnante alcuni giorni dopo. L'alunno comincia a scrivere i numeri della conta dentro i quadretti. Quando ha scritto parte dei numeri della seconda riga l'insegnante interviene: "*Puoi prevedere che numero verrà alla fine della seconda riga?*" e L'alunno risponde: "*trenta...*" Poi scrive i numeri fino a 30 e vede che restano dei quadretti "*trentanove*", poi arriva a 40: non si è sbagliato di molto.
A questo punto l'insegnante rilancia: "*Che numero verrà alla fine della quarta riga?*"
Difficile da contare a mente, l'alunno da solo non ce la fa, con l'aiuto dell'insegnante conta +10 e poi ancora +10 e arriva a 60... poi capisce come si fa... 80... 100...
Ma l'insegnante non ha finito: forza l'alunno a salire di livello racchiudendo con una linea le 5 righe che danno 100 (5x20). In questo modo suggerisce una strategia perchè il conteggio per 100 è più facile da controllare e dice: "*Si possono trovare velocemente altri 100 quadretti?*"
Proviamo a descrivere ciò che fa l'insegnante: forza l'alunno verso un modello che crede possa utilizzare autonomamente, fa un'ipotesi su ciò che l'alunno è in grado di comprendere e di fare da solo, gli offre la possibilità di far evolvere in qualche modo i suoi modelli mentali.
Anche con la classe seguirà una procedura analoga forzando i meno abili verso un modello ancora più strutturato: il quadrato di 10 x 10 per fare il 100.
La forzatura, nella risoluzione di questa situazione problematica, è necessaria perchè gli alunni non hanno la possibilità di accorgersi da soli di un eventuale errore di conteggio, il controllo è in mano all'insegnante. Ma fornendo un modello che ritiene adeguato, l'insegnante aiuta gli alunni a costruirsi una strategia per verificare se ciò che hanno congetturato ha senso oppure no.
E se qualcuno conosce già l'algoritmo della moltiplicazione con due cifre? È il caso di Giacomo. L'insegnante gli chiede perchè ha eseguito la moltiplicazione in colonna: "*Me l'hanno insegnata i miei genitori perchè tutte le sere devono fare dei conti (il papà è commesso viaggiatore)*."
Gianluca: "A*nch'io la so fare, perchè i miei fratelli me l'hanno insegnata mentre facevano i loro conti*". Giusi: "*Anch'io l'ho imparata da mio fratello*."
A questo punto nasce una forte richiesta da parte dei loro compagni: "*Corrado*[11]*, perchè non insegni anche a noi le moltiplicazioni in colonna?*"
L'algoritmo è un modo per tenere sotto controllo i calcoli che eseguiti solo mentalmente risultano piuttosto onerosi. L'insegnante vuole avviarli all'algoritmo, perché questo fa parte dei nuovi saperi, ma vuole partire dalle loro strategie spontanee. Propone quindi una nuova situazione: contare i quadretti di un cartellone lungo 47 quadretti e alto 39. Gli alunni ormai sanno che si tratta di moltiplicare 47x39.

"*Scriviamo in colonna 47+47+47... 39 volte*"
Ma la lavagna è troppo piccola...
"*Suddividiamo l'addizione in più colonne: una colonna da 9 e 3 da 10*"
Il modello additivo è ancora molto forte.
Allora l'insegnante dice: "*Come possiamo ottenere il 423 e il 1410 in maniera più breve?*"
Gianluca: "*47x9 in colonna e poi 47x30 in*

[11] è il nome dell'insegnante

colonna"
Gli alunni sanno contare per 3 e aggiungere lo zero alla fine ma... Gianluca conosce già l'algoritmo tradizionale per calcolare 47x39 e quindi lo usa. L'insegnante vuole accertarsi che non si tratti di una semplice acquisizione meccanica; allora chiede: "*Perché nelle moltiplicazioni, quando hai contato per 3, hai prima scritto uno 0 sotto le unità?*" e Gianluca: "*Perché quando conto il numero in quel posto sono decine*".
In questa classe, come abbiamo visto, e anche in un'altra dove si contano quadretti più piccoli, durante la discussione nasce l'idea di scomporre i numeri del moltiplicatore per semplificare il calcolo. Ad esempio Stefano per calcolare 41 X 59 scompone 41 in 40 e 1, fa prima 59 X 40 = 2360 e poi 59 X 1 = 59, somma 2360 +59 = 2419 e infine fa "x 2" e ottiene 4938 (invece di 4838).
Francesca invece per calcolare 42 X 60, fa 6 X 42 che fa 252 e poi aggiunge lo zero, per moltiplicare per 2 scompone 2520 e fa:

```
   0 X 2 =     0
  20 X 2 =    40
 500 X 2 =  1000
2000 X 2 =  4000
           --------
            5040
```

Un algoritmo inventato come questo può essere un buon punto di partenza per guidare progressivamente gli alunni verso la comprensione dell'algoritmo tradizionale: essi, infatti, forse senza rendersene conto, stanno già usando la proprietà distributiva.
Quali nuovi saperi sono stati introdotti partendo da questa situazione problematica? Sicuramente più di uno: doppio e metà di numeri grandi, moltiplicazione con numeri grandi, algoritmi di calcolo, proprietà delle operazioni…
Quali altre attività possono aiutare a consolidare e ampliare queste nuove conoscenze?
Contare le piastrelle di un pavimento, calcolare aree di superfici piane… Si tratterà di nuovo di trovare contesti significativi in cui porre problemi in modo tale che le idee matematiche possano ogni volta acquistare un senso per gli alunni e diventare "motivi" per l'azione.

"I chicchi di riso"
Un nuovo modo di contare nella scuola secondaria di I grado

In continuità con le attività proposte per la scuola dell'infanzia e per la scuola primaria vediamo come può proseguire il lavoro sul numero e sugli ordini di grandezza nella scuola secondaria di I grado attraverso la risoluzione di una situazione problematica[12] che, diversamente dalle precedenti, è formulata sotto forma di storia[13]:

"Un bramino dopo aver fatto dono di una scacchiera con 64 caselle al suo re chiese in cambio del riso: 1 chicco sulla prima casella, 2 sulla seconda, 4 sulla terza, 8 sulla quarta e così via...
Bastò un chilo di riso per accontentare il bramino ?"

Il contesto nel quale è inserita la situazione problematica assegnata agli alunni è quello del mondo fantastico, la storia è il "motivo" (nel senso di Leont'ev...)[14] perchè il tessuto narrativo coinvolge gli studenti in un modo nuovo. Essi vengono quindi forzati ad interpretare un testo scritto, la storia, trasponendolo in linguaggio matematico (uso di numeri, modelli anche grafici ecc.). Questo processo non è per nulla semplice perchè ciò che viene espresso in linguaggio naturale deve trasformarsi in ragionamento matematico. Questo richiede di andare al di là delle sole competenze tecniche.
Soffermiamoci ora sulla gestione concreta dell'attività.
L'insegnante consegna il testo agli alunni che lo leggono silenziosamente e interviene solo su eventuali problemi di comprensione del testo. Al termine della lettura raccoglie le previsioni dei ragazzi e le scrive sulla lavagna... Qualcuno dirà che il chilo di riso è sufficiente, altri diranno di no.
L'insegnante rilancia dunque il problema: divide la classe in gruppi con la consegna di verificare la correttezza delle ipotesi scritte e di giustificarle.
Ogni gruppo lavora autonomamente: decide quali materiali utilizzare, quale metodo di lavoro seguire, concorda le strategie ecc.
L'insegnante si limita ad osservare il modo di procedere dei gruppi utilizzando eventualmente una griglia di osservazione.

Si soffermano sulla comprensione del compito oppure cercano subito di realizzare il processo risolutivo?

Quali risorse cognitive utilizzano (gesti, parole, iscrizioni, rappresentazioni iconiche e metaforiche...)?

Esprimono l'esigenza di utilizzare materiali, oggetti, tecnologie?

Riescono a passare dalla discussione e dalla operatività (dal sapere posseduto al saper fare) alla formalizzazione della conoscenza costruita (sapere nuovo)?

Quali strumenti concettuali, conoscenze matematiche utilizzano?

Esempio di griglia di osservazione

[12] su Matematica 2001 l'attività si trova nel nucleo Misurare, il livello scolare indicato è la classe 5° della primaria
[13] Malba Tahan (1996), L'uomo che sapeva contare, Salani
[14] Non c'è attività senza motivo, l'attività 'immotivata' è attività non priva di motivo ma attività con un motivo nascosto (A.N.Leont'ev Attività, coscienza, personalità, ediz. Orig. Mosca, 1975, traduz. Ital. Firenze, Giunti Barbera, 1977)

Dopo circa mezz'ora[15] l'insegnante si inserisce nei gruppi in modo tale che, dove è necessario, vengano esplicitate e condivise le strategie messe in atto, siano ripercorsi i ragionamenti. Questo momento è molto importante perché quando l'insegnante si avvicina al gruppo per conoscere le strategie risolutive adottate e ne chiede un resoconto, spesso emergono perplessità e difficoltà non ancora superate. Di fronte alla richiesta di spiegare gli studenti devono, infatti, affrontare il problema di passare da una conoscenza di tipo tacito, implicito, ad una esplicita e consapevole.

> *"... un conto è simulare conoscenza un altro è pensare (essere convinti) di aver capito, un altro ancora è dimostrare a se stessi e agli altri la propria comprensione riuscendo a renderla fruibile a tutti. ... Un'ultima riflessione infine riguarda il lavoro in gruppi: essi sono certamente utili nel favorire la comunicazione delle conoscenze, il confronto delle congetture, l'abilità di sostenere argomentazioni, la crescita delle capacità di ascolto. Si tratta di competenze tutte molto importanti, in particolare nella società odierna, ... l'apprendimento è in fondo un'esperienza fortemente individuale. Ci si appropria realmente di un concetto, di un argomento, di una procedura, cogliendone il significato, quando si ha la possibilità di pensare e di riflettere con se stessi."* [16]

In particolare, interagendo con il gruppo, l'insegnante cerca di indirizzare gli alunni verso tecniche di riduzione della complessità numerica (ad esempio l'approssimazione) e l'uso di tabelle per la raccolta dei dati, ma senza dare mai soluzioni.
Al termine del lavoro ogni gruppo deve produrre una breve relazione scritta.
Il compito di scrivere giustificando le proprie scelte comporta un allontanamento dal prodotto, un'osservazione esterna del percorso fatto.
Sono passati alcuni giorni... L'insegnante prepara la discussione collettiva.
Le soluzioni proposte dai diversi gruppi sono esposte su un cartellone.
L'insegnante, che ha già analizzato le relazioni, a partire da queste prepara un canovaccio per la discussione. Durante la discussione, media gli interventi degli allievi, cerca di orientarli verso la ricerca di regolarità e portarli gradualmente verso la formalizzazione del problema.
Dopo aver costruito con gli alunni una tabella simile a questa, l'attenzione si concentra sulle relazioni tra i numeri della seconda e della terza colonna.

casella	n° chicchi sulla casella	n° totale chicchi di riso
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	?

L'insegnante dice: "*Cerchiamo la regola*"

1+2+4=7	cioè 4x2 -1
1+2+4+8+16+32=63	cioè 32x2 -1
1+2+4+8+16+32+64+128+256=511	cioè 256x2 -1

Un alunno: "*Ho capito... per sapere quanti chicchi ci sono su tutta la scacchiera occorre raddoppiare i chicchi della 64^a casella e sottrarre 1*"
L'insegnante rispecchia l'intervento dell'alunno per evidenziarlo: "*Per trovare il totale dei chicchi occorre raddoppiare i chicchi della casella e togliere 1. Allora possiamo aggiungere una colonna alla tabella con i prodotti di 2... Ma c'è qualche relazione tra la prima e la quarta colonna? ... E tra la terza e la quarta colonna?*

---

[15] la durata complessiva di questa prima parte dell'attività è di un'ora, i tempi delle consegna devono essere stabiliti prima e rispettati scrupolosamente, gli alunni non devono necessariamente completare il lavoro.
[16] Ferrara, F., Laiolo, P., Domingo, P., Savioli, K., Movimento, visualizzazione e costruzione di significato nella scuola secondaria di II grado, L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate (submitted)

casella	n° chicchi sulla casella	n° totale chicchi di riso	Prodotti di 2
1	1	1	2
2	2	3	2x2
3	4	7	2x2x2
4	8	15	2x2x2x2
5	16	31	2x2x2x2x2

Partendo dalla colonna dei prodotti di 2, l'insegnante introduce la potenza come modo più veloce per scrivere i prodotti del fattore 2... ma anche per facilitare la scoperta di regolarità!
"2 x 2 x 2 = 2^3 è il doppio del numero di chicchi presenti sulla 3ª casella
2 x 2 ..... x2 (64 volte) cioè 2^{64} rappresenta il doppio del numero di chicchi presenti sulla 64ª casella"

Ma possiamo scrivere sotto forma di potenza anche il numero di chicchi di ogni casella...

Ecco quindi la soluzione: il numero di chicchi totale sulla scacchiera è 2^{64}-1.
"Ma quanto vale questa potenza? Quanti chicchi sono 2^{64}?"

casella	n° dei chicchi su ogni casella	doppio dei chicchi
1	... = 1	2x 1 = 2^1
2	2^1=2	2x 2^1= 2^2
3	2^2=4	2x 2^2= 2^3
4	2^3=8	2x 2^3= 2^4
5	2^4=16	2x 2^4= 2^5
6	2^5=32	2x 2^5= 2^6
....	....	....
26	2^{25}=.........	2x 2^{25}= 2^{26}
....	....	....
64	2^{63} = ...	2x 2^{63}= 2^{64}

I ragazzi possono provare con la calcolatrice raddoppiando ogni volta, ma il procedimento è troppo lungo...
Gli studenti si scontrano anche con i limiti dello strumento: giunti all'ottava o alla decima cifra la calcolatrice semplice dà errore.
Si può ricorrere al computer e al foglio di calcolo: è un occasione per utilizzarlo!
Dopo la 26ª casella però compaiono strane scritte: la notazione esponenziale. Per il momento è sufficiente che l'insegnante spieghi che la parte di destra della notazione indica il numero degli zero. Così 2^{64} ha 19 zero: 10.000.000.000.000.000.000, l'ordine di grandezza è dieci miliardi di miliardi!!
Gli studenti si rendono conto che il numero totale dei chicchi di riso sulla scacchiera è enorme. Sicuramente quindi un chilo di riso non bastò per ricompensare il bramino. Per esserne sicuri, gli studenti stessi propongono di quantificare il chilo di riso: quanti chicchi di riso stanno in un pacco da un chilo?
"Troppo lungo contarli, troppo difficile pesare un chicco solo e poi non tutti i chicchi sono uguali..."
"Come fare? Come determinare il peso dei chicchi?"
Si pesano diversi mucchietti da 100 chicchi e si fa la media oppure si contano i chicchi di diverse pesate da 10 grammi l'una e si fa di nuovo la media. Comunque si conclude che il chilo non può proprio bastare: ce ne vuole molto, molto di più...
La situazione può essere ulteriormente sviluppata partendo da successive domande: *"Quanto pesa tutto il riso del bramino?A quale parte della produzione mondiale annua corrisponde ?"*
A queste domande si può dar risposta confrontando i risultati ottenuti con i dati reali che si trovano, ad esempio, sul sito http://www.fao.org/newsroom/it/news/2006/1000269/index.html.

L'attività si conclude… ma verso quali nuovi saperi abbiamo indirizzato gli allievi con questa situazione problematica? Saranno gli stessi studenti che durante la discussione collettiva li metteranno in evidenza, con l'aiuto dell'insegnante.
La risoluzione del problema è servita come spunto iniziale per un percorso sulle potenze, si è rivelata utile ragionare sugli ordini di grandezza ma anche per imparare nuove notazioni nate dall'esigenza di tenere sotto controllo il ragionamento matematico anche con numeri "molto grandi".